Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

Nota $= 1 + \dfrac{Puntos}{10}$. **Duración** = 60 minutos

---

1) [**15 ptos.**] Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ una transformación lineal tal que

$$T((-1,1,0)) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T((0,0,1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T((0,1,-1)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (**10 ptos.**) Determinar $T((x,y,z))$ y una base para el kernel de T.

b) (**5 ptos.**) Determinar la matriz $[T]_B^C$, donde $B = \{(1,0,0),(0,1,1),(0,0,-1)\}$ es una base **ordenada** de $\mathbb{R}^3$ y

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es la base canónica de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ **ordenada**.

2) [**25 ptos.**] Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2$ la transformación dada por la matriz $[T]_B^C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ donde $B = \{(1,0,-1),(0,1,1),(0,1,0)\}$ y $C = \{x^2, 1+x, x\}$ son bases **ordenadas** de $\mathbb{P}_2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

a) (**15 ptos.**) Demuestre que T es un isomorfismo y calcule $T^{-1}(ax^2+bx+c)$.

b) (**10 ptos.**) Suponga que $v \in \mathbb{R}^3$ es tal que $[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Encontrar $T(v)$.

3) [**20 ptos.**] Sea $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -8 \\ 4 & 1 & -4 \\ 8 & 4 & -9 \end{pmatrix}$

a) (**5 ptos.**) Se sabe que $P_A(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1$. Encuentre los valores propios de A.

b) (**10 ptos.**) Determinar una base para los espacios propios de A.

c) (**5 ptos.**) ¿Es A diagonalizable?. Si lo es, encontrar una matriz P invertible y una matriz D tal que $P^{-1}AP = D$, con D una matriz diagonal.

PAUTA

1) a) Notemos que

$$(x,y,z) = -x(-1,1,0) + (z+y+x)(0,0,1) + (y+x)(0,1,-1) \qquad \text{(3 pts.)}$$

Luego

$$T((x,y,z)) = -x\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (z+y+x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(0,0,1) + (y+x)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y+z & y-x \\ 0 & 2x+2y+z \end{pmatrix} \text{(2 pts.)}$$

Ahora,

$$\ker(T) = \{(x,y,z) \mid 2x+2y+z=0,\ y=x\}$$

es inmediato entonces que $B = \{(1,1,-4)\}$ es una base para $\ker(T)$ (5 pts.).

b) Tenemos que

$$T((1,0,0)) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(1 pts.)}$$

$$T((0,1,1)) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{(1 pts.)}$$

$$T((0,0,-1)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(1 pts.)}$$

Luego

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(2 pts.)}$$

2) No es difícil ver que $\det([T]_B^C) = 1 \neq 0$, lo cual implica que T es un isomorfismo (5 pts.). Ahora, notemos que

$$\begin{array}{rcllrcl} T((1,0,-1)) & = & 3x+2 & \Leftrightarrow & T^{-1}(3x+2) & = & (1,0,-1) \\ T((0,1,1)) & = & x^2+x & \Leftrightarrow & T^{-1}(x^2+x) & = & (0,1,1) \\ T((0,1,0)) & = & 2x^2+3x+1 & \Leftrightarrow & T^{-1}(2x^2+3x+1) & = & (0,1,0) \end{array} \qquad (1+1+1 \text{ pts.})$$

Además

$$ax^2+bx+c = (-a+b-c)\,(3x+2)+(4b-6c-3a)(x^2+x)\,(2a-2b+3c)\,(2x^2+3x+1) \qquad (5 \text{ pts.})$$

Por lo tanto

$$T^{-1}(ax^2+bx+c) = (-a+b-c)\,(1,0,-1)+(4b-6c-3a)(0,1,1)+(2a-2b+3c)\,(0,1,0) \qquad (2 \text{ pts.})$$

Sabemos que

$$[T]_B^C[v]_B = [T(v)]_C$$

es decir

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (5 \text{ pts.})$$

Luego, $T(v) = -x^2 + 2(1+x) = -x^2 + 2x + 2$ (5 pts.).

3) a) Note que $P_A(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda+1)^2(1-\lambda)$(3 pts.). Luego, los valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ (1+1 pts.).

b) V_1 tiene base $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (5 pts.)

V_{-1} tiene base $B_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (5 pts.)

c) Es diagonalizable pues $m.a(1) = 1 = m.g(1)$ y $m.a(-1) = 2 = m.g(-1)$ (1 pts.). Además $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2 pts.) es tal que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ (2 pts.)